1 Analysis – Kurvendiskussion

1.1 Allgemeingültige Betrachtungen

Die folgenden aufgezeigten Betrachtungen und Rechenschritte gelten für alle Arten von Funktionen.

- **Funktion** (*z.B. Polynom n-ten Grades*)

  Schreibweise als:

  - Funktionsgleichung:

    $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

  - Zuordnungsvorschrift:

    $$f:\ x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

  - eine Funktion liegt vor, wenn jedem x-Wert genau ein y-Wert zugeordnet ist
  - wobei einem y-Wert mehrere x-Werte zugeordnet sein können
  - **Beachte:** ist einem x-Wert mehr als ein y-Wert zugeordnet, dann liegt keine Funktion, sondern eine **Relation** vor (z.B. Kreis im Koordinatensystem)

- **Schnittpunkt** $S_y(0|y)$ **mit y-Achse**

  alle x-Werte $x = 0$ setzen, d.h. $f(0) = \cdots = \quad \Longrightarrow \quad$ ausrechnen

- **Nullstellen** $N_i(x_i|0)$ **(Schnittpunkte mit x-Achse)**

  y-Wert $y = 0$ setzen, d.h. $f(x) = 0 = \ldots \quad \Longrightarrow \quad$ Gleichung nach x auflösen

- **zugehöriger y-Wert bei gegebenem x-Wert**

  gegebenen x-Wert einsetzen in $f(x) = \cdots = \quad \Longrightarrow \quad$ ausrechnen

- **zugehöriger x-Wert bei gegebenem y-Wert**

  gegebenen y-Wert in $f(x) = y = \ldots$ einsetzen $\quad \Longrightarrow \quad$ Gleichung nach x auflösen

- **Monotonieverhalten**

  - beschreibt das Verhalten der Funktion bei ansteigenden x-Werten (*d.h. von links nach rechts*)
  - monoton steigend, wenn gilt ($h \in \mathbb{R}^+$)

    $$f(x) < f(x+h)$$

  - monoton fallend, wenn gilt ($h \in \mathbb{R}^+$)

    $$f(x) > f(x+h)$$

- **Definitionsmenge** D_f

  - Menge D_f aller x-Werte, für welche die Funktion $f(x)$ definiert ist (*d.h. x-Werte, die die Funktion annehmen kann*)

  - die Definitionsmenge D_f wird eingeschränkt durch Definitionslücken bzw. senkrechte Asymptoten

- **Wertemenge W_f**
  - Menge W_f aller y-Werte, die die Funktion annimmt
  - die Wertemenge W_f wird eingeschränkt durch absolute Maxima oder Minima und durch waagerechte (schräge) Asymptoten

- **Schnittpunkte $S_i(x_i|y_i)$ der Graphen zweier Funktionen**
  - Gleichsetzen der Funktionsgleichungen $f(x) = g(x)$
  - Auflösen der entstandenen Gleichung nach x
  - Einsetzen der x-Werte in eine der beiden Funktionsgleichungen und berechnen der dazugehörigen y-Werte
  - $\Longrightarrow S_1(x_1|y_1)$, $S_2(x_2|y_2)$, etc.

- **Extremwerte (Maxima, Minima, Terrassenpunkte)**
- **Wendepunkte und Krümmungsverhalten**
- **Stetigkeit**
- **Differenzierbarkeit**
- **Definitionslücke und Asymptoten**
- **Differentialrechnung**
- **Integralrechnung**

1.2 Lineare Funktionen – Geraden

- **Funktionsgleichung**

$$f(x) = mx + t$$

  - bei gegebenen Graphen durch Ablesen des Schnittpunktes t mit der y-Achse und der Steigung m mittels Steigungsdreieck

- **Steigung**

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- **Schnittpunkt mit y-Achse**

$$f(0) = m \cdot 0 + t = t$$

- **Zeichnen des Graphen**
  - markieren von $S_y(0|t)$ als Schnittpunkt auf der y-Achse

- ausgehend von $S_y(0|t)$ markieren eines zweiten Punktes $S(x_2|y_2)$ mittels Steigungsdreieck (Δx nach rechts oder links entsprechend Vorzeichen und Δy nach oben)
- verbinden der beiden Punkte $S_y(0|t)$ und $S(x_2|y_2)$

- **Nullstellen (Schnittpunkt mit x-Achse)**
  - Funktionsgleichung gleich Null setzen $f(x) = 0$ und nach x auflösen

$$mx + t = 0$$

$$x = -\frac{t}{m}$$

- **Monotonieverhalten**
  - <u>monoton steigend</u> für $m > 0$
  - <u>monoton fallend</u> für $m < 0$
  - für $m = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = t \quad \Longrightarrow \quad f(x)$ ist parallel zur x-Achse
- **Definitionsmenge** $D_f = \mathbb{R}$
- **Wertemenge** $W_f = \mathbb{R}$ (für $m \neq 0$)
- **Erstellen der Funktionsgleichung** bei zwei gegebenen Punkten
  - $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$ sind gegeben
  - Steigung berechnen $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
  - m und x-, y-Wert von A <u>oder</u> B in $y = mx + t$ einsetzen und t berechnen
  - m und t in $f(x) = mx + t$ einsetzen
- **Schnittpunkte mit Graphen anderer Funktionen**
  - z.B. Schnittpunkt zweier Geraden $f(x) = m_1 x + t_1$ und $g(x) = m_2 x + t_2 \Longrightarrow$

$$m_1 x + t_1 = m_2 x + t_2$$

$$(m_1 - m_2) \cdot x = t_2 - t_1$$

$$x_s = \frac{t_2 - t_1}{m_1 - m_2}$$

  - x_s in $f(x)$ <u>oder</u> $g(x)$ einsetzen und y_s ausrechnen $\Longrightarrow S(x_s|y_s)$
  - **oder:** $f(x)$ und $g(x)$ als Gleichungssystem mit zwei Gleichungen I und II (Variablen x und y) mittels Gleichsetzungs-, Einsetz- oder Additionsverfahren lösen
- **Normale** – zwei Geraden stehen aufeinander senkrecht
  - unter einer Normalen im Punkt $P(x_0|y_0)$ versteht man eine Gerade $g_n(x) = m_n x + t_n$, die im Punkt $P(x_0|y_0)$ auf dem Graphen einer anderen Funktion, z.B. Gerade $f(x) = mx + t$, senkrecht steht
  - Steigung m_n der Normalen berechnet sich durch

$$m_n = -\frac{1}{m}$$

1.3 Gebrochen rationale Funktionen – Hyperbeln

- **Funktionsgleichung**

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots\ + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ \dots\ + b_1 x + b_0}$$

  - eine gebrochen rationale Funktion ist eine Funktion, welche im Nenner die Variable x enthält
  - Beispiele: $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$; $h(x) = \frac{x^2+2x}{x^3+x^2}$; $k(x) = \frac{x^3+x^2+1}{2x}$

- **Definitionsmenge, Definitionslücke und Asymptoten**
  - Definitionslücke x_l wird berechnet, durch Null setzen des Nenners

$$b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ \dots\ + b_1 x + b_0 = 0$$

    und auflösen nach der Variable $x_l = \ \dots$
  - Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}\backslash\{x_l\}$
  - senkrechte Asymptoten sind vorhanden an der Stelle der Definitionslücke $x_l = \dots$
  - x-Achse als Asymptote, wenn $Zaehlergrad < Nennergrad$
  - waagerechte Asymptoten sind vorhanden, wenn $Zaehlergrad = Nennergrad$
    d.h. der Grenzwert der Funktion geht gegen eine Konstante $\Longrightarrow$ Konstante ist Asymptote
  - schräge Asymptoten sind vorhanden, wenn der $Zaehhlergrad > Nennergrad$
  - Wertemenge ist abhängig von waagerechten, schrägen Asymptoten etc.

- **Schnittpunkt mit y-Achse**
  - vorhanden, wenn keine Definitionslücke an der Stelle $x = 0$ existiert
  - $x = 0$ in die Funktionsgleichung einsetzen $\Longrightarrow$ $f(0) = \ \dots\ =$

- **Nullstellen**
  - Nullstellen werden berechnet, durch Null setzen des Zählers

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots\ + a_1 x + a_0 = 0$$

    und auflösen nach der Variable $x_i = \ \dots$

1.4 Quadratische Funktionen – Parabeln

- **Formen quadratischer Gleichungen**
  - allgemeine Form $f(x) = ax^2 + bx + c$
  - Scheitelpunktform $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ mit Scheitelpunkt $S(x_s|y_s)$
  - Nullstellenform $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ mit Nullstellen $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$

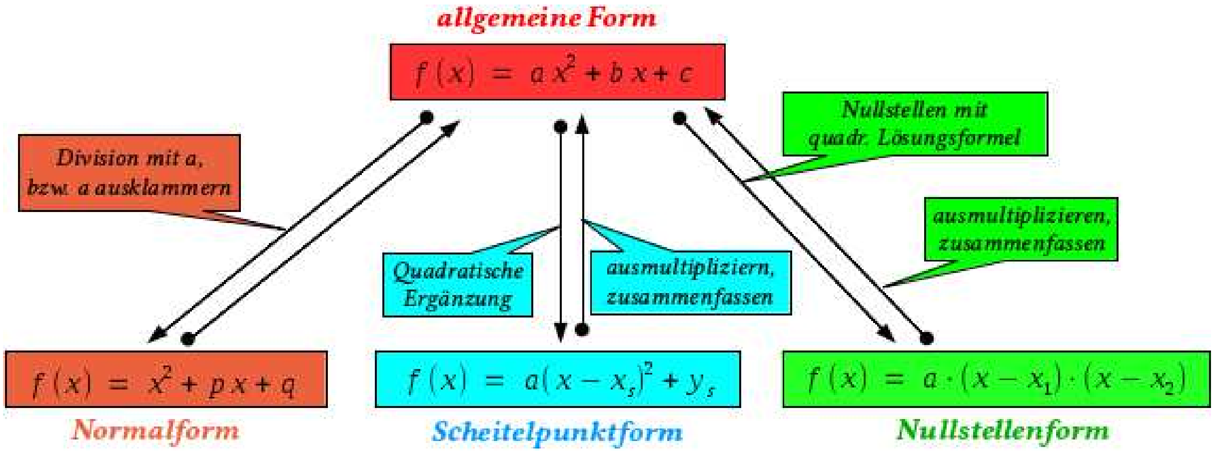

Abbildung 1: Beziehungen/Umwandlung verschiedener Formen quadratischer Gleichungen

- Normalform $f(x) = x^2 + px + q$

- **Faktor** a
  - $a > 0$: Parabel nach **oben geöffnet**
  - $a < 0$: Parabel nach **unten geöffnet**
  - $|a| = 1$: **Normalparabel**
  - $|a| > 1$: **gestreckte** Parabel, d.h. schmaler als Normalparabel
  - $|a| < 1$: **gestauchte** Parabel, d.h. breiter als Normalparabel

- **Verschiebung**
  - der Graph der Funktion $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ entsteht aus der unverschobenen Funktion $f(x) = ax^2$ durch Verschiebung um x_s in x-Richtung und um y_s in y-Richtung

- **Definitionsmenge** $D_f = \mathbb{R}$

- **Wertemenge** $W_f = [x_s; \infty[$ (für $a > 0$) und $W_f =]-\infty; x_s]$ (für $a < 0$)

- **Nullstellen**
  - für $b = 0$ $\Longrightarrow$ $ax^2 + c = 0$ $\Longrightarrow$ $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$
  - für $c = 0$ $\Longrightarrow$ $ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$ $\Longrightarrow$ $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$
  - für $ax^2 + bx + c = 0$ $\Longrightarrow$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

- **Schnittpunkt mit der y-Achse**

$$f(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = c$$

- **Aufstellung der Funktionsgleichung**
  - Scheitelpunkt $S(x_s|y_s)$ und weiterer Punkt $P(x|y)$
    x-, y-Werte von S und P in die Scheitelpunktsform einsetzen und Parameter a ausrechnen $\Longrightarrow$ $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$

- Nullstellen $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$ und weiterer Punkt $P(x|y)$
  x-, y-Werte von N_1 und N_2 in die Nullstellenform einsetzen und Parameter a ausrechnen $\Longrightarrow$ $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$
- drei Punkte $P(x_1|y_1)$, $Q(x_2|y_2)$, $R(x_3|y_3)$
  Punkte P, Q, R jeweils in die allgemeine Form einsetzen und System aus drei Gleichungen I, II, III mittels Einsetz-Verfahren etc. nach den drei Parametern a, b, c auflösen $\Longrightarrow$ $f(x) = ax^2 + bx + c$

- **Schnittpunkte mit Graphen anderer Funktionen**
  - Parabel & Gerade: Funktionen gleich setzen $\Longrightarrow$ x-Werte berechnen $\Longrightarrow$ y-Werte mit einer Funktionsgleichung berechnen

$$ax^2 + bx + c = mx + t$$

$$ax^2 + (b - m)x + (c - t) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(b - m) \ \pm \ \sqrt{(b - m)^2 - 4a(c - t)}}{2a}$$

  - Parabel & Parabel: Funktionen gleich setzen $\Longrightarrow$ x-Werte berechnen $\Longrightarrow$ y-Werte mit einer Funktionsgleichung berechnen

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

$$(a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(b_1 - b_2) \ \pm \ \sqrt{(b_1 - b_2)^2 \ - \ 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)}}{2(a_1 - a_2)}$$

- **Extremwert-Probleme**
  - Aufstellung einer Extremwert-Gleichung für den Extremwert der gesuchten Größe (z.B. Formel für Fläche etc.) aus den Angaben/Fragestellung der Aufgabe
  - enthält die aufgestellte Extremwert-Gleichung zwei Variable, so muss eine weitere Gleichung aus den Bedingungen aufgestellt werden, die es ermöglicht, eine der beiden Variablen durch die andere Variable auszudrücken $\Longrightarrow$ eine Variable kann in der Extremwertgleichung eliminiert werden
  - die neue Form der Extremwert-Gleichung mit nur noch einer Variablen hat die Form einer quadratischen Gleichung $\Longrightarrow$ der Scheitelpunkt ist die Lösung des Problems
  - die Extremwertgleichung muss mittels quadratischer Ergänzung in die Scheitelpunktsform umgewandelt werden $\Longrightarrow$
    * der y-Wert des Scheitelpunktes gibt den Maximal- bzw. Minimalwert der gesuchten Größe an
    * der x-Wert des Scheitelpunktes gibt den Wert an, für welchen die gesuchte Größe maximal bzw. minimal wird

1.5 Trigonometrische Funktionen – sin, cos, tan, cot

1.6 Wurzelfunktionen

1.7 Logarithmische Funktionen

1.8 Exponetialfunktionen

1.9 Potenzfunktionen

1.10 Polynome